ANALYSE

Mercier Dany-Jack
TC2

marque déposée

le Calligraphe

cahier _____

école _____

classe _____

nom _____

CAHIERS SCOLAIRES LIC 84 NF

No 103

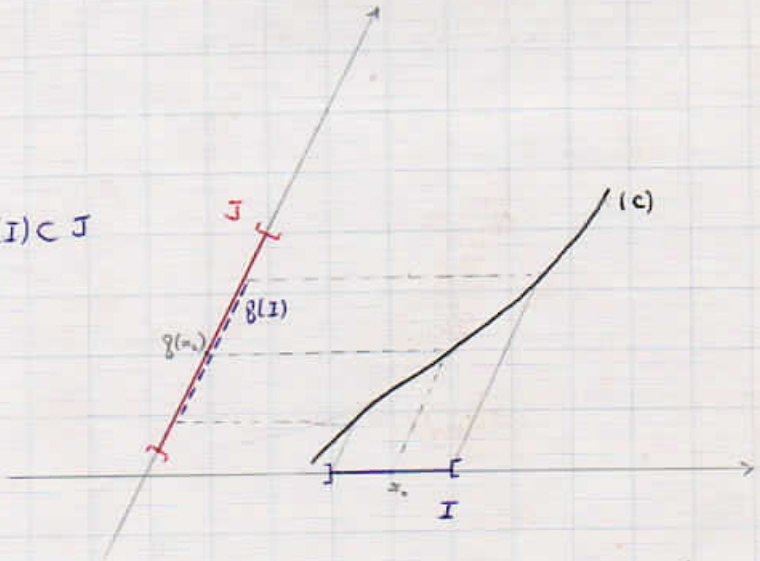
005

TC2

ANALYSE

LEÇONS n°1

$g(I) \subset J$

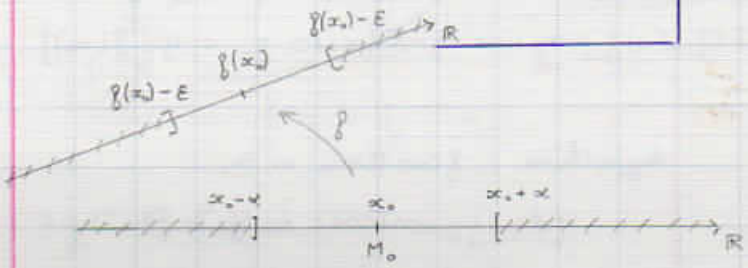


13.2 1 Compléments relatifs à : continuité, limites, suites, dérivées.

Continuité en x_0

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \ |x - x_0| < \alpha \ \vdash \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \alpha \ \vdash \ \boxed{x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha}$$



$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \vdash \ f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

2ème énoncé

$\forall J$ ouvert, $\exists I$ ouvert / $f(I) \subset J$

I centré en x_0 ; J centré en $f(x_0)$

Composée de 2 fonctions continues

On admet qu'elle est continue

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x)$

$x_0 \longmapsto y_0 = f(x_0)$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto z = g(y)$

$y_0 \longmapsto z_0 = g(y_0)$

$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g \circ f(x) = z = g(y)$

$x_0 \longmapsto g \circ f(x_0) = z_0 = g[f(x_0)]$

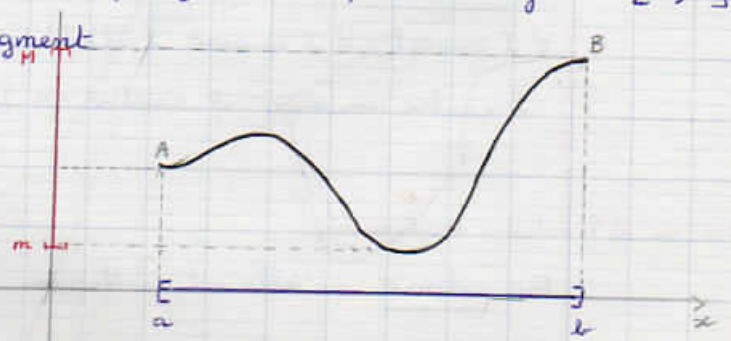
Hypothèse : f continue en x_0

g continue en $y_0 = f(x_0)$.

Conclusion (admise) : $g \circ f$ continue en x_0.

Théorème important (admis)

L'image, par f continue, d'un segment $[a, b]$ est un segment



Remarque

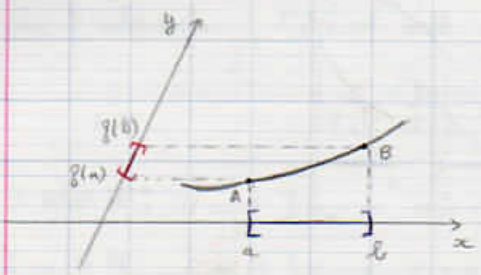
L'image d'un intervalle par f continue est un intervalle

Si le premier est fermé, le second l'est aussi.

Si le premier est ouvert, ~~le~~ on ne sait rien du second.

14.2

Cas où f continue est strictement monotone sur $[a, b]$



Dans ce cas, f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$

$\exists f^{-1}$ de $[f(a), f(b)]$ sur $[a, b]$

$f : x \longmapsto f(x) = y$

$f^{-1} : y \longmapsto \underbrace{f^{-1}(y)}_{f^{-1}(x)} = \underset{Y}{x}$

La représentation graphique de f^{-1} peut s'interpréter de 2 manières :

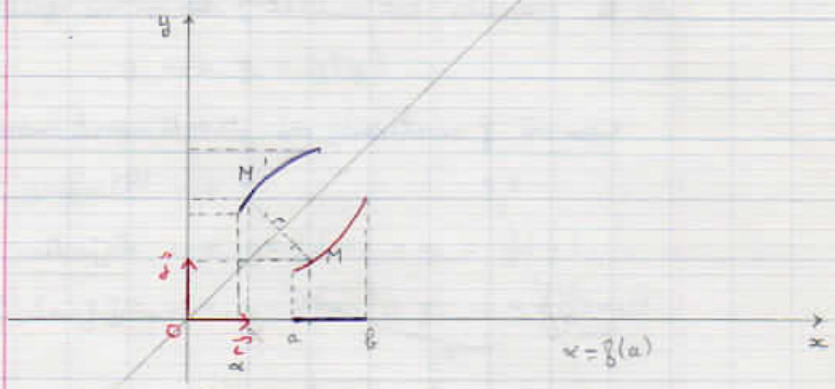
* l'arc $\overset{\frown}{AB}$ dessiné en noir représente f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; il f peut représenter aussi f^{-1} mais dans le nouveau repère $(O, \vec{j}, \vec{i})$.

* conserver le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on le choisit orthonormé conformément au programme). On cherche

alors le graphique de $Y = f^{-1}(X)$ avec $X = y$

$Y = x$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $M'\begin{pmatrix} X=y \\ Y=x \end{pmatrix}$



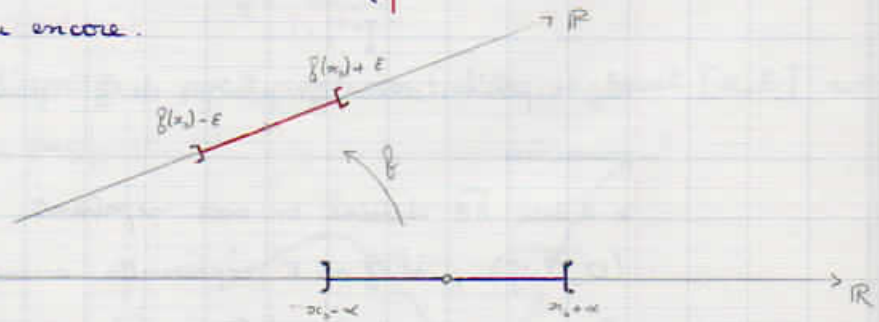
17.2

Limites

$\lim_{x_0} f = \ell$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \left\{ 0 < |x - x_0| < \alpha \right. \vdash |f(x) - \ell| <$

ou encore.



$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \left\{ x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[- \{x_0\} \right. \vdash |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Remarque : on ne sait pas si f est définie en x_0 ; la

définition ci-dessus s'applique dans les deux cas

ou encore :

$\forall$ J ouvert centré en ℓ , $\exists$ I ouvert, centré en x_0 et pointé tel que $f(I) \subset J$

Unicité de ℓ, quand elle existe.

Par l'absurde : Si $\ell' \neq \ell$

$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[- \{x_0\} \vdash |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\exists \alpha' \in \mathbb{R}_+^* \ / \ x \in]x_0 - \alpha', x_0 + \alpha'[- \{x_0\} \vdash |f(x) - \ell'| < \varepsilon$

$\alpha'' = \inf(\alpha'; \alpha)$

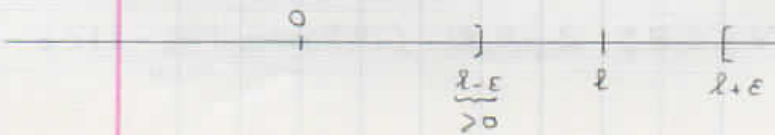
Alors $\exists \alpha'' \in \mathbb{R}_+^* \vdash \{ x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\vdash \begin{cases} |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ |f(x) - \ell'| < \varepsilon \end{cases}$ et ceci $\forall \varepsilon \}$

Il suffit de prendre ε suffisamment petit pour que les 2 intervalles (voir dessin) soient disjoints d'où impossibilité.

Donc $\ell' = \ell$ et ℓ est unique, si du moins elle existe.

Remarque

Sgn $f(x)$, pour x "voisin" de x_0 :



$\ell > 0 \vdash \exists f(x) \;/\; f(x) > 0$

$\ell < 0 \vdash \exists f(x) \;/\; f(x) < 0$

Résumé, si $\exists \ell$, $\exists f(x)$ / $\operatorname{Sgn} f(x) = \operatorname{Sgn} \ell$

$\ell . f(x) > 0$

Prolongement par continuité d'une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 et non défini en x_0.

f / $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ $\quad \text{def}_f = \mathbb{R} - \{2\}$

En $x_0 = 2$, f n'est pas définie.

$g : x \longmapsto g(x) = x - 3$

$\text{def}_g = \mathbb{R} \quad g(2) = -1$

g est le prolongement par continuité de f en $x_0 = 2$:

$\lim\limits_{2} f = g(2) = -1$

Suites (u_n)

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \longmapsto f(n) = u_n \in \mathbb{R}$

($\mathbb{N}$ est peut être remplacé par $I \subset \mathbb{N}$)

Il se peut qu'on trouve $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$

Cela signifie :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N} \;/\; n > p \vdash |u_n - \ell| < \varepsilon$

p sera alors le rang de l'image $u_p = \ell(p)$ à partir de laquelle la différence $u_n - \ell$ devient suffisamment petit

exemple

$u_n = \frac{3n}{n-2}$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$.

$u_3 = 9$ $\quad u_7 = 4,2$

$u_4 = 6$ $\quad u_8 = 4$

$u_5 = 5$ $\quad u_9 \simeq 3,9$

$u_6 = 4,5$

Soit $\varepsilon = 1$, $\exists p \in \mathbb{N} / n > p \vdash |u_n - 3| < 1$

$\left| \frac{3n}{n-2} - 3 \right| < 1$?

$\frac{6}{|n-2|} < 1 \quad \vdash \quad |n-2| > 6$

$n - 2 > 6 \vdash n > 8$

Soit $\varepsilon = 0,5$

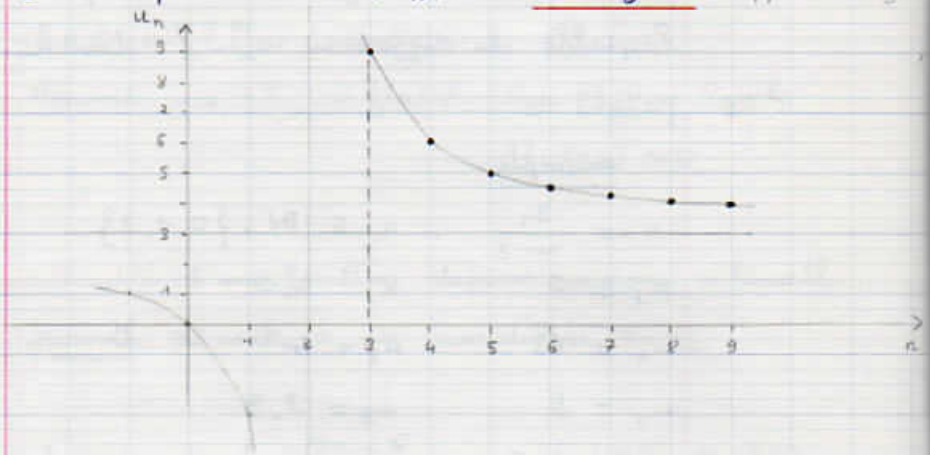
$\left| \frac{3n}{n-2} - 3 \right| < 0,5$?

$\frac{6}{\underbrace{n-2}_{>0}} < \frac{1}{2} \quad \vdash \quad n > 14$

Soit $\varepsilon = 10^{-2}$

$\frac{6}{|n-2|} < 10^{-2} \quad \vdash \quad n > 602$

On dit que la suite (u_n) est convergente. (opp. divergente)



20.2

Dérivée en un point de la composée de 2 fcts dérivables.

$\begin{cases} f \text{ dérivable en } x_0 \\ g \text{ dérivable en } y_0 = f(x_0) \end{cases}$

$g \circ f$ dérivable en x_0 ?

$\exists I$ centré en x_0 / $\forall x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left[f'(x_0) + \varepsilon(x)\right] \quad (1)$$

$$\text{et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

$\exists J$ centré en y_0 $\neq f(x_0)$ / $\forall y \in J$,

$$g(y) = g(y_0) + (y - y_0)\left[g'(y_0) + \varepsilon_1(y)\right] \quad (2)$$

$$\text{et } \lim_{y \to y_0} \varepsilon_1(y) = 0$$

f dérivable en x_0 y est continue

On choisit l'intervalle J précédent. On sait que, alors,
$\exists I'$ centré en x_0, tel que $f(I') \subset J$
$\forall x \in I \cap I'$, alors les lignes (1) et (2) peuvent être utilisées.

$$g[f(x)] = g[f(x_0)] + [f(x) - f(x_0)][g'[f(x_0)] + \varepsilon_1[f(x)]]$$

$$g \circ f(x) = g \circ f(x_0) + (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon(x)][g'[f(x_0)] + \underbrace{\varepsilon_1 \circ f(x)}_{?}] \quad (3)$$

$\varepsilon_1 \circ f$ est-elle continue en x_0 ?
Comme f est continue en x_0, il suffirait que ε_1 le soit en y_0. Or la définition de ε_1 est muette relativement à la valeur de $\varepsilon_1(y_0)$. Nous décidons donc $\varepsilon_1(y_0) = 0$ et comme la limite de ε_1 en y_0 était 0, alors ε_1 est continue en y_0.
Donc $\varepsilon_1 \circ f$ est continue en x_0 ; $\varepsilon_1 \circ f(x_0) = 0$, donc

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \varepsilon_1 \circ f = 0}$$

On revient à la ligne (3). On y effectue tous les calculs. On remarque des produits tels que $f'(x_0) \cdot \varepsilon_1 \circ f(x)$ dont la limite, lorsque $x \to x_0$ est 0. Il reste en définitive :

$$g \circ f(x) = g \circ f(x_0) + (x - x_0)\left[g' \circ f(x_0) \cdot f'(x_0) + \varepsilon_2(x) \right]$$

$$\text{et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon_2(x) = 0 \qquad (4)$$

Ce qui montre 2 choses :

1°/ $\exists\ (g \circ f)'(x_0)$

2°/ $(g \circ f)'(x_0) = g' \circ f(x_0) \cdot f'(x_0)$

$= g'[f(x_0)] \times f'(x_0)$

En abrégé,

$y = f(x)$

$z = g(y)$

$z = g \circ f(x) = g[f(x)]$

$z'(x) = z'(y) \times y'(x)$

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0)} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Dérivée de la réciproque d'une fonction

voir démonstration sur livre C2 65

$f : x \longmapsto f(x) = y$

$x \in]a, b[$, $f(x)$ définie, continue, strictement monotone, dérivable

$\exists\, f^{-1}$: $y \longmapsto x = f^{-1}(y)$

$X \longmapsto Y = f^{-1}(X)$

$x \longmapsto y = f^{-1}(x)$ On pose $f^{-1} = g$

$x = g(y)$

On montre que $g'(y) = \dfrac{1}{f'[g(y)]} = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$$

ou

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Si l'on utilise maintenant $y = f^{-1}(x)$ au lieu de $x = f^{-1}(y)$, alors $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$

Exemple

$f^{-1} : x \longmapsto f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = y \quad , \forall x \in \mathbb{R}_+$

$f : y \longmapsto f(y) = x = y^3 \quad , \forall y \in \mathbb{R}_+$

$x'(y) = 3y^2$

$f'(y) = 3y^2$

$f'[f^{-1}(x)] = 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$

d'où $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Remarque : si l'on avait écrit $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, et si on avait

utilisé la dérivée de x^n, $n \in \mathbb{Q}$, alors $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

idem

10.3 2 127

Fonctions vectorielles

Etude sur livre

Applications à la recherche de tangentes à des courbes classiques

① Rappel : Si M décrit $(\mathcal{C}) \subset E$ affine, il existe $\overrightarrow{OM}$, par exemple (O pt fixe), tel que : $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ variable avec le paramètre t (ou u ou θ) lorsque M décrit la courbe $(\mathcal{C})$.

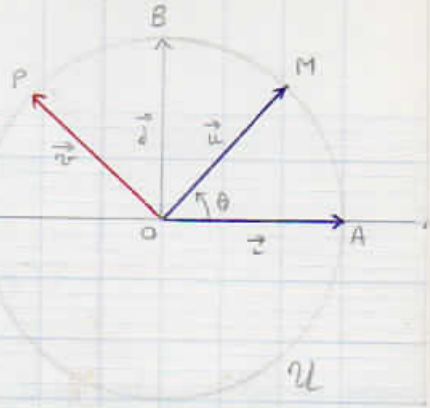
Alors, si la fonction F

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \vec{E}$$
$$t \longmapsto \vec{v} = F(t)$$

est dérivable pour t_0, et si, de plus, $F'(t_0) \neq \vec{0}$, alors $F'(t_0)$ est vecteur directeur de la tangente en $M_0(t_0)$.

Remarque : si on travaille avec $\overrightarrow{\omega M}$, $\vec{\omega}$ fixe $\neq 0$, alors

$$\frac{d\overrightarrow{\omega M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\omega O}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad \text{car} \quad \frac{d\overrightarrow{\omega O}}{dt} = \vec{0}$$



② Un cas fondamental

θ = une mesure réelle de l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$.

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

θ = paramètre réel.

$$\vec{u} = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{u}' = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$$

$$\vec{v} = \vec{u}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\vec{j}$$

Si c'est t la variable indépendante et non θ, alors

$$u'(t) = u'(\theta) \times \theta'(t) \qquad \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$u'(t) = \vec{v} \cdot \theta'$$

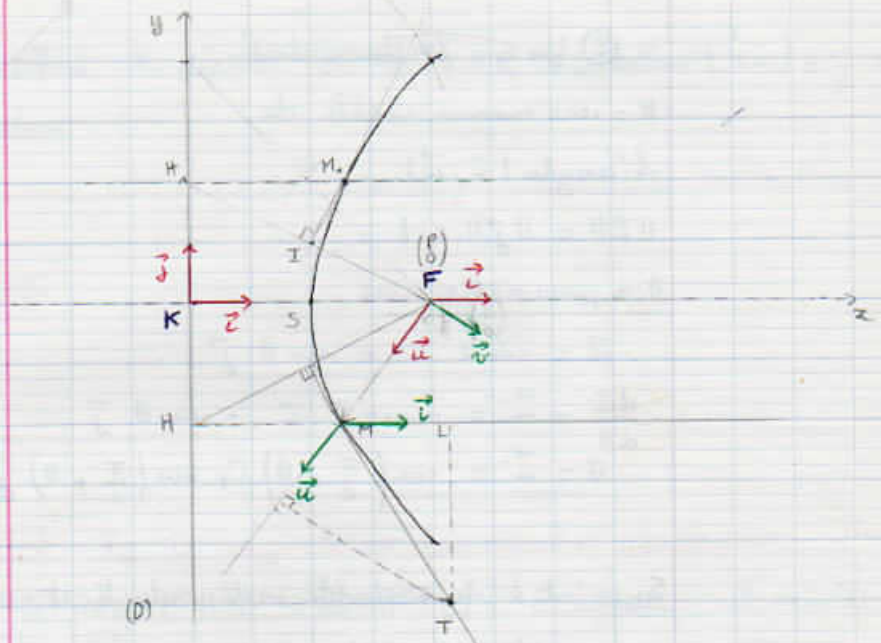
$$u'(t) = \theta' \times \vec{v}$$

$$\|u'(t)\| = |\theta'| \times 1$$

③ Tangente en un point d'une conique

* parabole.

C'est l'ensemble des points à égale distance d'un point fixe nommé foyer et d'une droite fixe et d'une droite fixe nommée "directrice", le point fixe n'appartenant pas à la droite fixe



Soit $(\widehat{\vec{\imath}, \vec{u}})$ mesuré par $\theta \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{FM} = r\vec{u}$ avec $r = f(\theta) > 0$ Tangente

$(\overrightarrow{FM})'(\theta) = r'\vec{u} + r\vec{v}$ avec $\vec{v} = \vec{u}'(\theta)$

angle $(\vec{u}, \vec{v})$ mesurée par $\frac{\pi}{2}$ par exemple

La 2e fonction vectorielle $\overrightarrow{KM}(\theta)$ donnera le même vecteur dérivé, au pt θ, puisque :

$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{FM}$

$(\overrightarrow{KM})'(\theta) = \vec{0} + (\overrightarrow{FM})'(\theta)$

or $\overrightarrow{KM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $x > 0$

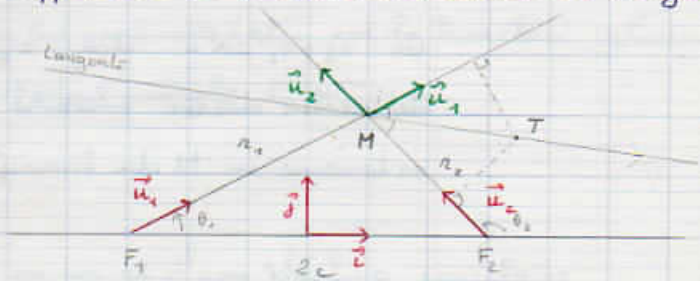
De plus $x = r$ puisque $\|\overrightarrow{FM}\| = \|\overrightarrow{HM}\|$

$(\overrightarrow{KM})'(\theta) = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$

On déduit $r'\vec{u} + r\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$

Or $r = x$, donc $r' = x'$.

Les vecteurs entourés sont les projections orthogonales du même vecteur dérivé sur les droites dirigées par $\vec{u}$ et $\vec{\imath}$ et le vecteur dérivée appartient à la droite bissectrice de l'angle $(\vec{\imath}, \vec{u})$



* <u>ellipse</u>

$r_1 + r_2 = 2a$

$r_1 \in \mathbb{R}_+ \ / \ \overrightarrow{F_1M} = r_1\vec{u}_1$

$r_2 \in \mathbb{R}_+ \ / \ \overrightarrow{F_2M} = r_2\vec{u}_2$

mes $(\vec{\imath}, \vec{u}_1) = \theta_1$

mes $(\vec{\imath}, \vec{u}_2) = \theta_2$

θ_1 et θ_2 dépendent de t, par exemple.

$(\overrightarrow{F_1M})'(t) = (r_1\vec{u}_1)'(t)$

$= r_1'\vec{u}_1 + r_1\vec{v}_1 \cdot \theta_1'(t) \qquad \vec{v}_1 = \vec{u}_1'(\theta_1) \qquad (1)$

$(\overrightarrow{F_2M})'(t) = (r_2\vec{u}_2)'(t)$

$= r_2'\vec{u}_2 + r_2\vec{v}_2\,\theta_2'(t) \quad$ avec $\vec{v}_2 = \vec{u}_2'(\theta_2) \qquad (2)$

$$\begin{cases} \text{mes}(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = \text{mes}(\vec{u}_2, \vec{v}_2) = \frac{\pi}{2} \\ \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 1 \end{cases}$$

Or $\overrightarrow{F_2M} = \overrightarrow{F_2F_1} + \overrightarrow{F_1M}$

donc $(\overrightarrow{F_2M})'(t) = (\overrightarrow{F_1M})'(t)$ cf (1) et (2)

$$r_1' \vec{u}_1 + r_1 \theta_1' \vec{v}_1 = r_2' \vec{u}_2 + r_2 \theta_2' \vec{v}_2$$

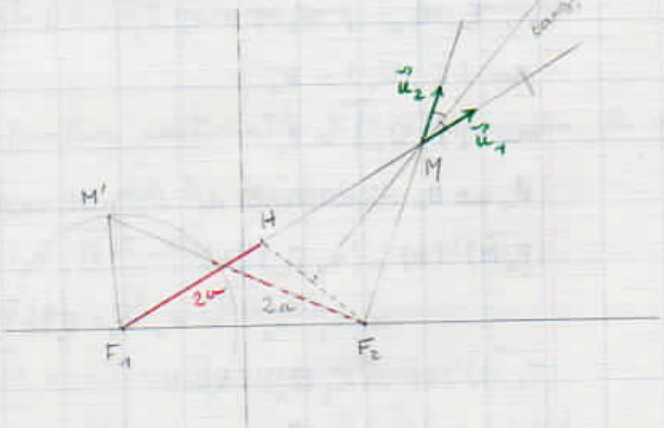
Or $r_1 + r_2 = 2a$ donc $r_2' = -r_1'$

Le vecteur dérivé cherché appartient à la bissectrice extérieure en M du triangle F_1MF_2

11 mars

* Hyperbole

C'est l'ensemble des $M \in (P)$ tels que $\begin{cases} |MF_1 - MF_2| = 2a \\ F_1F_2 = 2c \quad , \quad c > a \end{cases}$



$MF_1 = r_1$; $MF_2 = r_2$

$|r_1 - r_2| = 2a$ $\quad \begin{cases} r_1 - r_2 = 2a \\ \text{ou} \\ r_2 - r_1 = 2a \end{cases}$

dans les 2 cas $r_1' = r_2'$

Un calcul analogue à celui de l'ellipse conduit à un vecteur directeur de la tangente dont les mesures des projections orthogonales sur les supports de MF_1 et MF_2 sont égales : la tangente est portée par la bissectrice intérieure de l'angle en M du triangle F_1MF_2

14.3

④ Tangente en un pt d'une hélice circulaire

$$M \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}_+^* \qquad \text{un rep. } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ orthonormé.}$$

$$M \in \mathcal{H} \qquad m \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

Un vecteur directeur de la tangente (MT) à $\mathcal{H}$ en M :

$$\vec{w} \begin{cases} x'(\theta) = -a\sin\theta \\ y'(\theta) = a\cos\theta \\ z'(\theta) = b \end{cases}$$

Un vecteur directeur de la tangente (mt) à $(\mathcal{C})$ (cercle (O, a)) en m :

$$\vec{w} \begin{cases} x'(\theta) = -a \sin\theta \\ y'(\theta) = a\cos\theta \\ z'(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{W} = (-a\sin\theta)\vec{i} + (a\cos\theta)\vec{j} + b\vec{k} \\ \vec{w} = (-a\sin\theta)\vec{i} + (a\cos\theta)\vec{j} \end{cases}$$

on en tire : $\vec{W} = \vec{w} + b\vec{k}$

$\vec{w}$ = projection orthogonale sur le plan de $(\mathcal{C})$ du vecteur $\vec{W}$.

$\tan\alpha = \frac{b}{a}$ (ici $b > 0$)

$\forall M \in \mathcal{H}$

Rem : pas de l'hélice $= p$

p vérifie : $\theta \longmapsto z = b\theta$

$2\pi \longmapsto p = b\,2\pi$

$$\boxed{p = 2\pi b}$$

Rem : $\theta_1 \longmapsto z_1 = b\theta_1$

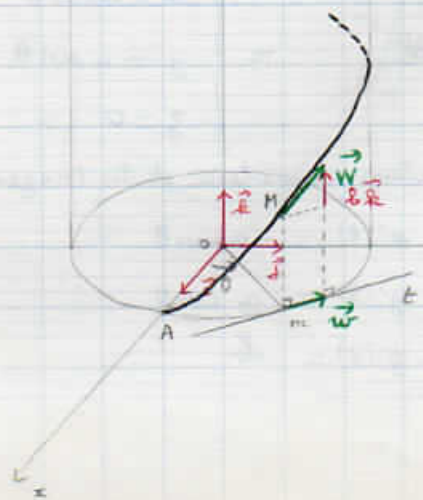
$\theta_2 \longmapsto z_2 = b\theta_2$

$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$, alors

$z_2 - z_1 = b\,2\pi = p$

p est indépendant du point M_1 initial,

Si $M_1 = A$, $\theta_1 = 0$



19.3 3 Calcul intégral

p 184

Intégrale, au sens de Riemann, d'une fonction sur un segment.

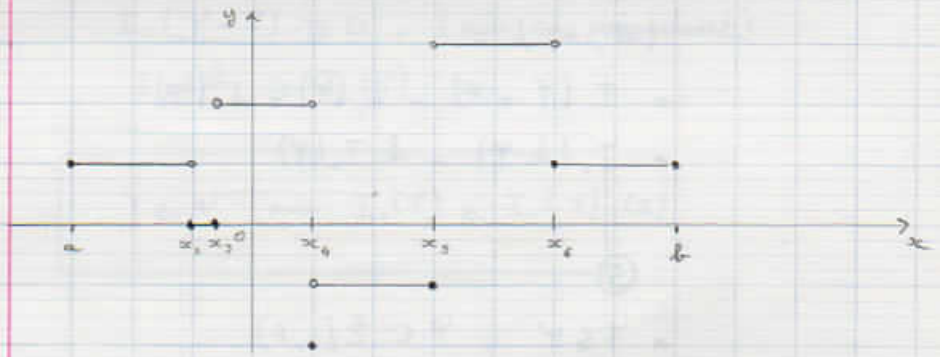
① Fonction en escalier sur $[a, b]$

$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

* $\forall\, i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$

Sur $]x_i, x_{i+1}[$, $\varphi(x) = \lambda_i$

* $x_1 = a$; $x_{n+1} = b$ et $\varphi(x_i) = \mu_i$ (pas nécessairement λ_i ni λ_{i+1} ni λ_{i-1})



② Ensemble des fonctions en escaliers définies sur $[a, b]$

$\left\{ \begin{array}{l} + \text{ interne} \\ \cdot \text{ externe} \end{array} \right.$

$\left[\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot \right]$ = espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

③ Intégrale, au sens de Riemann, d'une fonction en escalier sur $[a, b]$

$$I_0(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{>0}$$

$I_0(\varphi) \in \mathbb{R}$

$$I_0 : \mathcal{E} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto I_0(\varphi)$$

ATTENTION ↓

④ I_0 est une forme linéaire définie sur $\mathcal{E}$

* $\mathcal{E}$ et $\mathbb{R}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

$(\mathcal{E}, +, .)$ = esp. vect. sur $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, .)$ = " "

* $I_0(\varphi + \psi) = I_0(\varphi) + I_0(\psi)$
* $I_0(k\varphi) = k.I_0(\varphi)$

⑤

* $\varphi \leqslant \psi$, $\varphi \in \mathcal{E}[a,b]$
$\psi \in \mathcal{E}[a,b]$

signifie : $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$

* $\varphi \geqslant 0 \longmapsto \forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \geqslant 0$

* $I_0(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$

21.3

$\varphi(x) \geqslant 0 \vdash \lambda_i \geqslant 0$ et $x_{i+1} - x_i > 0$

$\vdash I_0(\varphi) \geqslant 0$

$$\boxed{\varphi \geqslant 0 \vdash I_0(\varphi) \geqslant 0} \quad (1)$$

* $\varphi \leqslant \psi$ sur $[a, b]$

donc $\psi(x) - \varphi(x) \geqslant 0$

$\psi - \varphi \geqslant 0$

$I_0(\psi - \varphi) \geqslant 0$ (voir cas précédent)

$I_0(\psi) \geqslant I_0(\varphi)$

$$\boxed{\varphi \leqslant \psi \vdash I_0(\varphi) \leqslant I_0(\psi)} \quad (2)$$

* $m \leqslant \varphi(x) \leqslant M$

$m(b-a) \leqslant \varphi(x) \leqslant M(b-a)$ [cf (2)]

* $|\varphi(x)| \leqslant M$

$-M \leqslant \varphi(x) \leqslant M$

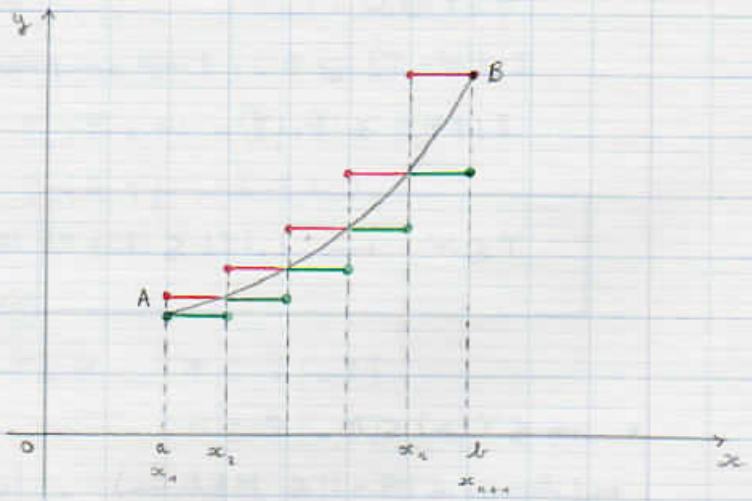
$-M(b-a) \leqslant I_0(\varphi) \leqslant M(b-a)$

$|I_0(\varphi)| \leqslant M(b-a)$

$$|\varphi(x)| \leq M \longmapsto |I_a(\varphi)| \leq M(b-a) \quad (3)$$

Intégrale, au sens de Riemann, de fcts intégrables pas nécessairement en escaliers sur un intervalle fermé $[a, b]$. (p 181)

Exemple : fct monotone sur $]a, b[$



$$\varphi \leq f \leq \psi$$

$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\forall x \in]x_i, x_{i+1}]$, $\varphi(x) = f(x_{i+1})$

$\forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$

et $\varphi(\int_a^b f) = \varphi(n+1)\ f(a)$

$\Psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$,

$\forall x \in [x_i , x_{i+1}[\quad , \quad \Psi(x) = f(x_{i+1})$

et $\Psi(b) = \Psi(x_{n+1}) = f(b)$ par exemple)

$\exists\, I_0(\varphi)$; $\exists\, I_0(\Psi)$ et même une infinité de chaque type ; il suffit d'agir sur l'étendue d'un intervalle partiel $]x_i , x_{i+1}[$ pour augmenter le nombre de $I_0(\varphi)$ et pour voir apparaître une suite croissante de réels $I_0(\varphi)$, croissante avec le nombre d'intervalles ; l'étendue de chacun : $\frac{b-a}{n}$ diminue alors.

De même, $\exists$ suite décroissante de réels $I_0(\Psi)$

E = ensemble des réels $I_0(\varphi)$

F = ensemble des réels $I_0(\Psi)$

$\forall\, I_0(\varphi) \in E, \quad I_0(\varphi) \leqslant I_0(\Psi)$

Donc E majorée par un $I_0(\Psi)$.

E, $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, E majoré, alors $\exists$ BS pour E soit U.

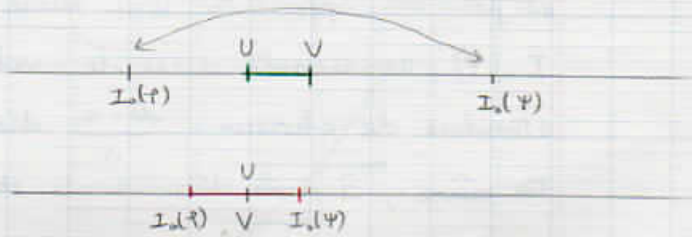
De même, F est minorée par un quelconque $I_0(\varphi)$

F, $F \subset \mathbb{R}$, $F \neq \emptyset$, F minorée, alors $\exists$ BI pour F, soit V.

Définition :

— On dira que f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si $U = V$ ".

On va le montrer dans ce cas.
On va remplacer le but $U = V$ par le but : la différence $I_*(\Psi) - I_*(\Psi)$ peut être rendue aussi petite qu'on le veut



Ici, $I_*(\Psi) - I_*(\Psi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i+1}) - f(x_i) \right] \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\leq \alpha}$

α = la plus grande étendue d'intervalle.

$I_*(\Psi) - I_*(\Psi) \leq \alpha \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i+1}) - f(x_i) \right]$

$\leq \alpha \sum_{i=1}^{n} \left[f(b) - f(a) \right]$

$I_*(\Psi) - I_*(\Psi) \leq \underbrace{\alpha \left(f(b) - f(a) \right)}$

il est possible, en agissant sur α de rendre ce produit inférieur strictement à ε, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

7.4

On admet, à propos des fonctions intégrables au sens de Riemann, sur $[a, b]$, les propriétés ("calquées" sur celles des fcts en escalier) suivantes :

1°/ L'ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$, muni de + et de . est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2°/ $I : f \longmapsto I(f) \in \mathbb{R}$

I est une forme linéaire.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right) dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$$

3°/ $\forall x \in [a, b]$,

$$f(x) \geqslant 0 \vdash \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

4°/

$$f(x) \geqslant g(x) \vdash \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

5°)

$m \leq f(x) \leq M$

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

6°)

$\forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leq M$

$-M \leq f(x) \leq M$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq M(b-a)$$

Valeur moyenne d'une fonction intégrable sur $[a,b]$

Par définition, c'est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Justification : une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,dx$ est, par exemple :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1}-x_i) \quad \text{avec } x_{i+1}-x_i = \frac{b-a}{n}$$

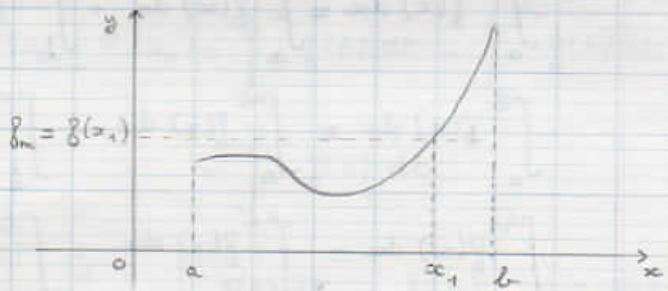
$$\text{et } \begin{cases} a = x_1 \\ b = x_{n+1} \end{cases}$$

$$\sum = (b-a)\,\frac{f(a) + f\left(a+\frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)}{n}$$

Bien entendu, cette valeur moyenne est comprise entre m et M si f est minorée et majorée.
(m et M sont les 2 bornes)

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Si, de plus, f est continue, alors $\exists\, x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$



Relation de Chasles

pour les fcts en escalier φ (ou ψ) comme pour les f intégrables sur $[a, b]$.

1° $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

2° Conventions

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3° $a < b < c$

Si on est sûr que f est intégrable sur $[a, c]$, intervalle qui contient les 2 autres, alors

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(idem)

8.4

Primitives d'une fonction

1° Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

On admet que, comme les fonctions monotones sur $[a, b]$, f est intégrable sur $[a, b]$ (idem si l'on rencontre une fonction monotone par morceaux).

Donc f est intégrable sur $[a, b]$, donc elle l'est sur $[a, x]$, $x \in [a, b]$

↓

Il existe donc $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$

On va montrer que $F'(x_0) = f(x_0)$.

En effet :

$$r = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

$\lim_{x \to x_0} r = ?$

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

$$= \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

$$r = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(c) \quad , \quad c \in [x_0, x]$$

(voir valeur moyenne sur $[x_0, x]$ de f)

Or f est continue en tous points de $[a, b]$.

Donc continue en x_0

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ / $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$,

alors $f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$

Dès qu'on a placé ainsi x, alors $x_0 < c < x$

(ou $x < c < x_0$) entraîne : $c \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$

et $f(c) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$,

ce qui équivaut à :

$$|f(c) - f(x_0)| < \varepsilon$$

En résumé,

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* / |c - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(c) - f(x_0)| < \varepsilon$

donc $\lim\limits_{c \to x_0} f(c) = f(x_0)$

mais, ici, c'est $x \to x_0$ qui entraine $c \to x_0$.

Donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(c) = f(x_0)$

$$\boxed{F'(x_0) = f(x_0)}$$

2°/ On dit que F est une primitive de f. Y-en a-t-il d'autres ?

* $G(x) = F(x) + C$

$G'(x_0) = F'(x_0) = f(x_0)$

G est une autre primitive de f sur $[a, b]$

* Soit H une primitive quelconque de f

$H'(x_0) = f(x_0) = F'(x_0)$

$H'(x_0) - F'(x_0) = 0$ et ceci $\forall x_0 \in [a, b]$

$H - F = Cte$ $\quad$ $H(x) = F(x) + C$

9.4

* Parmi toutes les primitives de la famille ainsi trouvée, en existe-t-il au moins une qui prenne la valeur λ donnée pour $x = x_0$ donné ?

Si elle existe, alors $H(x) = F(x) + C$, C à déterminer

Mais $H(x_0) = \lambda$

$\lambda = F(x_0) + C$

$C = \lambda - F(x_0)$

$\exists !\ H_\lambda(x) = F(x) + \lambda - F(x_0)$

Si demande $H_1(x)$ de façon que $H_1(x_0) = \lambda = 0$, alors $H_1(x) = F(x) - F(x_0)$

$$\boxed{H(x) = F(x) - F(x_0)} \qquad (1)$$

Celle des primitives de $f(x)$ qui s'annule pour x_0 est : $H(x) = F(x) - F(x_0)$, $F(x)$ désignant une primitive de $f(x)$.

Rappel : $\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de $f(x)$

Donc prenons $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour la formule (1)

$$H(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

$$\boxed{H(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt}$$

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt = F(x) - F(x_0)$$
$$= \left[F(x)\right]_{x_0}^x$$

Cette formule est utile pour un calcul d'intégrale, si on a la chance de connaître une primitive F de f

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b}$$

Calcul de primitives

1°) Se souvenir de toutes les dérivées du programme :

Ex :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \left[\tan x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \simeq 1,1$$

2°/ Quelquefois, il est bon de remplacer f donnée par une somme $g + h$.

ex : $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi - \frac{1}{4} \left(\sin 4\pi - \sin 0 \right)$$

$$I = \pi$$

3°/ Intégration par parties :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left[u(x) \cdot v(x) \right]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\int_a^b u'(x) \, v(x) \, dx = \int_a^b \left[u(x) \, v(x) \right]' dx - \underbrace{\int_a^b u(x) \, v'(x) \, dx}$$

si cette intégrale existe

Une primitive évidente de $(u(x).v(x))'$ est $u(x).v(x)$.

Donc

$$\int_a^b [u(x)v(x)]' dx = \Big[u(x).v(x)\Big]_a^b$$

Il se peut que le calcul de la 2e intégrable, soit $\int_a^b u(x)v'(x)dx$, soit plus favorable que celui demandé.

Si oui, on le fait, et l'intégration par partie a réussi.

ex:

$$I = \int_0^x \underbrace{t}_{v} \underbrace{\sin t}_{u'} \, dt$$

$$I = \int_0^x (u.v)' \, dt - \int_0^x (u.v')(t) \, dt$$

$$I = \Big[uv\Big]_0^x - \int_0^x uv' \, dt$$

$$= \Big[-t\cos t\Big]_0^x + \Big[\sin t\Big]_0^x$$

$$= -x\cos x + \Big[\sin t\Big]_0^x$$

$$I = -x\cos x + \sin x$$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx .$$

Remarque

$f : x \longmapsto x \sin x$

Toutes les primitives de f sont :

$F(x) = -x\cos x + \sin x + C$.

4 Ensembles quarrables

Aires

Admis : Dans P affine euclidien, $\exists$ famille Q d'ensembles de points dits ensembles quarrables tels que

$$\mathcal{A} : \begin{cases} Q \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ E \longmapsto \mathcal{A}(E) \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

$\mathcal{A}(E)$: aire de E

De plus, $E_1 \in Q$, $E_2 \in Q$, alors $\begin{cases} E_1 \cup E_2 \in Q \\ E_1 - E_2 \in Q \end{cases}$

(Q est un clan)

De plus, $E \in Q$, f désignant une isométrie (affine et asso. à $\vec{h}$. orth.), alors $f(E) \in Q$ et $\mathcal{A}[f(E)] = \mathcal{A}(E)$

De plus, l'ensemble K des $M(x, y)$ de P en repère orthonormé : $\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$

K est quarrable et $\mathcal{A}(K) = ab$

On dit que $\mathcal{A}$ est une mesure.

Une mesure possède les propriétés suivantes :

→ * $E_1 \cap E_2 = \emptyset \vdash \mathcal{A}(E_1 \cup E_2) = \mathcal{A}(E_1) + \mathcal{A}(E_2)$

* $\forall E_1, E_2$, $\mathcal{A}(E_1 \cup E_2) = \mathcal{A}(E_1) + \mathcal{A}(E_2) - \mathcal{A}(E_1 \cap E_2)$

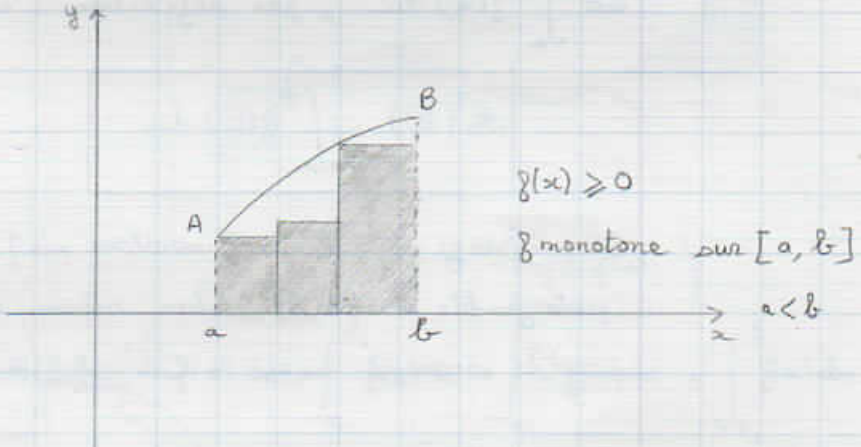
* $E_1 \subset E_2 \vdash \mathcal{A}(E_1) \leq \mathcal{A}(E_2)$

* $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$

* L'aire d'un segment est nulle.

* le carré (ouvert ou fermé) de côté 1 a pour aire 1.

16.4



On admet que le domaine hachuré est quarrable.

$\mathcal{D} = \{ M,\ M \in P,\ \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j},\ \bullet\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x) \}$

Valeur de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$?

On considère les intégrales $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, φ étant l'une des fcts en escalier qui minore f, puis les $\int_a^b \psi(x)\,dx$

(φ en escalier majorent f).

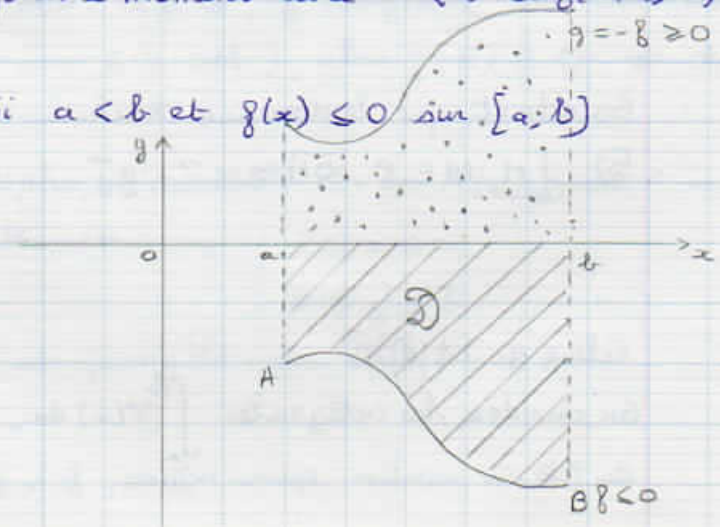
Une de ces intégrales représente la somme des aires des rectangles associés au graphique de la fonction en escalier.

On a donc 2 suites de réels, l'une croissante, l'autre décroissante ; on admet qu'il existe une borne commune à ces deux ensembles. Cette borne commune est $\int_a^b f(x)\,dx$; par définition c'est l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$

$$\boxed{\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

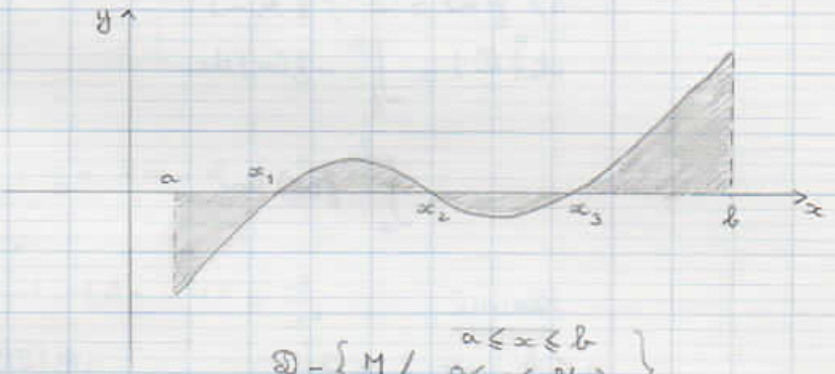
Si on change l'énoncé "monotone sur $[a, b]$" en "intégrable sur $[a, b]$", alors même résultat (toujours pour le moment avec $a < b$ et $f(x) \geq 0$).

Si $a < b$ et $f(x) \leq 0$ sur $[a; b]$



$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^b [-f(x)]\,dx$$

Le cas général est celui où sur $[a, b]$, $\exists\, f(x) \geq 0$ et $\exists\, f(x) \leq 0$



$$\mathcal{D} = \left\{ M \;/\; \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \\ \text{ou } f(x) \leq y \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^{x_1} -f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} -f(x)\,dx + \int_{x_3}^{b} f(x)\,dx$$

Les mathématiciens ont aussi décidé d'introduire une aire algébrique qui n'est autre que $\int_a^b f(x)\,dx$, en gardant toujours $f(x)$ avec son signe même s'il varie sur $[a, b]$.

Remarque : $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ calculée tout à l'heure en utilisant x_1, x_2, x_3, est dite aire géométrique du domaine.

Extension au cas où $\underline{a > b}$

1°/ $f(x) \geq 0$; $[b, a]$

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

2°/ $f(x) \leq 0$; $[b, a]$

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_b^a -f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

Résumé

$a < b$ et $f \geq 0$, $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)\,dx$

$a < b$ et $f \leq 0$, $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = -\int_a^b f(x)\,dx$

$a > b$ et $f \geq 0$, $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = -\int_a^b f(x)\,dx$

$a > b$ et $f \leq 0$, $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)\,dx$

ex : $f(x) = \sin^2 x$ sur $[0, \pi]$

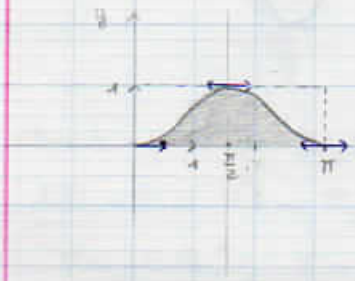
$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$



asc : $y = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$

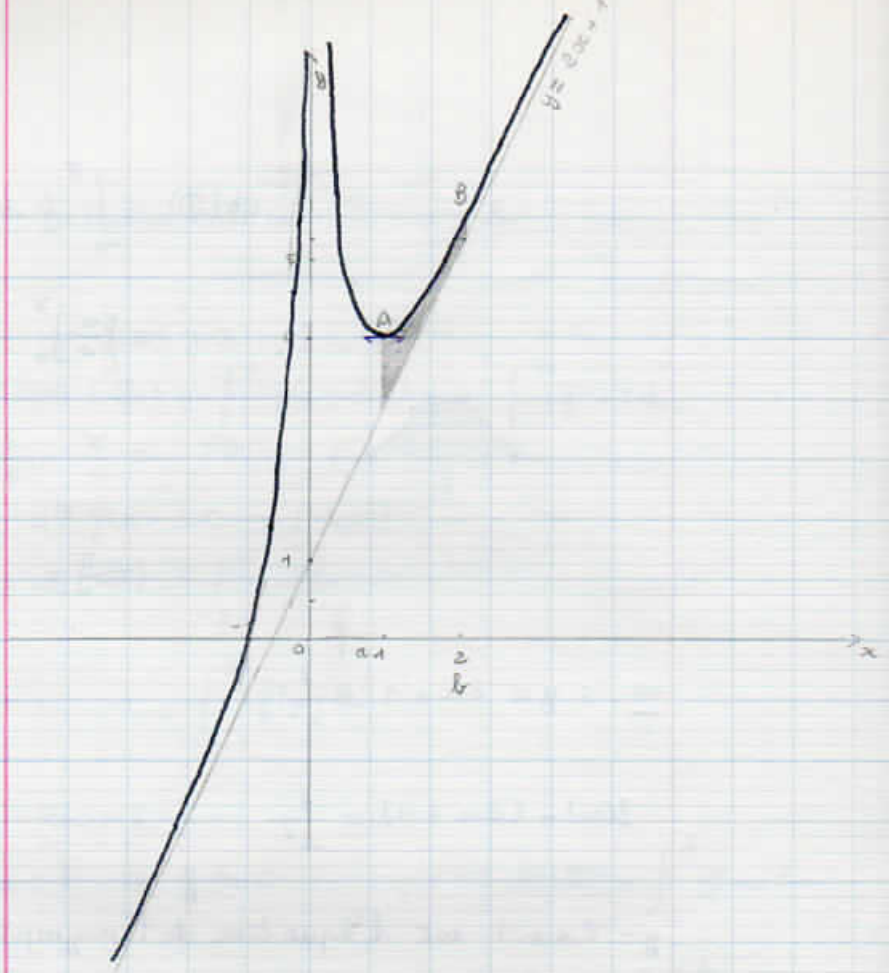
$$f(x) - (2x+1) = \frac{1}{x^2}$$

$y = 2x + 1$ est l'équation de l'asymptote oblique de la courbe.

$$f'(x) = 2 - 2\frac{1}{x^3}$$

$$= 2\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$



$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_1^2 y\,dx - \int_1^2 Y\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

5 Logarithmes népérien

21.4

Introduction

Existe-t-il des fonctions f, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, bijectives, dérivables $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et vérifiant :

$\forall x_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x_2 \in \mathbb{R}_+^*$,

$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$?

Si oui, $f(x_1 x) = f(x_1) + f(x)$ $\quad \forall x_1 \in \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$x_1 f'(x_1 x) = f'(x)$ (on a dérivé les 2 membres par rapport à x)

Par exemple, $x = 1$

$x_1 f'(x_1) = f'(1)$

$f'(x_1) = \dfrac{f'(1)}{x_1} = \dfrac{k}{x_1}$

$f'(x) = \dfrac{k}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{k}{t}$ est intégrable.

$f(x) = \displaystyle\int_{\alpha}^{x} \frac{k}{t}\, dt$

L'intégrale écrite ci-dessus s'annule pour $x = \alpha$.

$f(x_1 \cdot 1) = f(x_1) + f(1)$

$f(1) = 0$

Donc $\alpha = 1$ $\qquad f(x) = k \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$

S'il existe f, on ne peut les trouver que dans cette famille $(k \in \mathbb{R})$.

Inversement, $\forall f(x) = k \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$, a-t-on

$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$?

* $f'(x) = \frac{k}{x}$

* $f'(x_1 x) = \cancel{x_1} \cdot \frac{k}{x_1 x} = \frac{k}{x_1 x}$

$f'(x) = f'(x_1 x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}_+^*$

Les 2 membres sont les images du même x par 2 fonctions différentes.

De plus, 2 dérivées par rapport à x sont égales, les fonctions diffèrent d'une constante

$f(x) = f(x_1 x) + C$

22.4 $x_1 f'(x_1 x) = \frac{k}{x}$

$f' : x \longmapsto \frac{k}{x}$ $\quad$ $f : x \longmapsto f(x)$

$x_1 x \longmapsto \frac{k}{x_1 x}$ $\quad$ $x_1 x \longmapsto f(x_1 x)$

$\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = f(x_1 x)$

$\varphi'(x) = x_1 f'(x_1 x)$

$x_1 f'(x_1 x) = \frac{k}{x}$ devient :

$\varphi'(x) = \frac{k}{x}$

On rappelle $f'(x) = \frac{k}{x}$, donc :

$\varphi'(x) = f'(x)$

$\varphi(x) = f(x) + C$

$f(x_1 x) = f(x) + C$, or $f(1) = 0$

$f(x_1) = 0 + C \vdash C = + f(x_1)$

Donc $f(x_1 x) = f(x) + f(x_1)$

oui

Les fonctions trouvées sont donc les seules répondant aux conditions du problème. Ce sont toutes les fonctions - logarithmes.

Etude du cas $k = 1$

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{t}\,dt = \text{Log } x$$

= logarithme népérien de x

$$\text{Log} : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \left(f'(1) = k = 1\right)$$

f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log } x = ?$

Si la limite était, par hasard, $+\infty$, alors il sera possible de rendre $\text{Log } x > B$, $\forall B > 0$, B donné.
Inversement, si on peut faire $\text{Log } x > B$, alors $\lim\limits_{+\infty} = +\infty$.
On se souvient que $\text{Log}(x_1 x_2) = \text{Log } x_1 + \text{Log } x_2$
donc $\underline{\text{Log } x^n = n \text{ Log } x}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

donc $\text{Log } 2^n = n \text{ Log } 2$
Peut-on obtenir $\text{Log } 2^n > B$?
Oui car $n \text{ Log } 2 > B \iff n > \dfrac{B}{\text{Log } 2}$ est possible

Alors il suffit de prendre $x > 2^n$ pour que $\text{Log } x > \text{Log } 2^n$ (Log croissante)

$$\text{Log } x > \text{Log } 2^n > B$$

Donc $\lim\limits_{+\infty} \text{Log } x = +\infty$

* $\lim\limits_{0_+} \text{Log } x = ?$

$X = \frac{1}{x}$, donc $X \to +\infty$

$x = \frac{1}{X}$, $\text{Log } x = \text{Log } \frac{1}{X}$

Or $\text{Log}\left(X \cdot \frac{1}{X}\right) = \text{Log } X + \text{Log } \frac{1}{X}$

$$\text{Log } \frac{1}{X} = -\text{Log } X$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0_+} \text{Log } x = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Log} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0_+} \operatorname{Log} x = -\infty$$

x	0		1		e		$+\infty$
$\operatorname{Log} x$	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

23. 4 Existence éventuelle d'une asymptote oblique pour le graphique.

Rappel : s'il existe une telle droite, $y = ax + b$ est son équation.

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x}$$

$$b = \lim_{+\infty} (\operatorname{Log} x - ax)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x} \ ?$$

$$\operatorname{Log} x = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt$$

Ici, $x > 1$.

On a cherché, et on a trouvé une fonction φ telle que

$0 < \dfrac{\text{Log}\, x}{x} < \dfrac{\varphi(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$

En effet : $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$x > 1 \vdash \sqrt{x} < x$

$\dfrac{1}{\sqrt{x}} > \dfrac{1}{x} \vdash \varphi(x) > \text{Log}\, x.$

$\dfrac{\varphi(x)}{x} > \dfrac{\text{Log}\, x}{x}$

$\varphi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt > 0$ dès que $x > 1$

$0 < \dfrac{\text{Log}\, x}{x} < \dfrac{\varphi(x)}{x}$

$\varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad \varphi(x) = \left[2\sqrt{x}\right]_1^x = 2\sqrt{x} - 2$

$\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{2\sqrt{x} - 2}{x} = 2\dfrac{\sqrt{x}}{x} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x}$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{Log}\, x}{x} = 0.}$

Remarque

Au cours de ce calcul, on a rencontré l'inégalité

$\text{Log}\, x < 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x} = \Psi(x)$

$\text{Log}\, x < 2\sqrt{x}$ dès que $x > 1$.

Conséquence : s'il existe asymp. oblique, $a = 0$. Impossible car alors $\exists$ asym. horizontale, or $\nexists$ as. horizontale.

Le graphique possède une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$. Cette direction est la direction asymptotique.

Calcul de $\lim\limits_{x \to 0_+} x \operatorname{Log} x$

$X = \frac{1}{x}$; $X \to +\infty$

$$x \operatorname{Log} x = \frac{\operatorname{Log} \frac{1}{X}}{X} = - \frac{\operatorname{Log} X}{X}$$

$$\lim_{x \to 0_+} x \operatorname{Log} x = \lim_{X \to +\infty} - \frac{\operatorname{Log} X}{X} = 0.$$

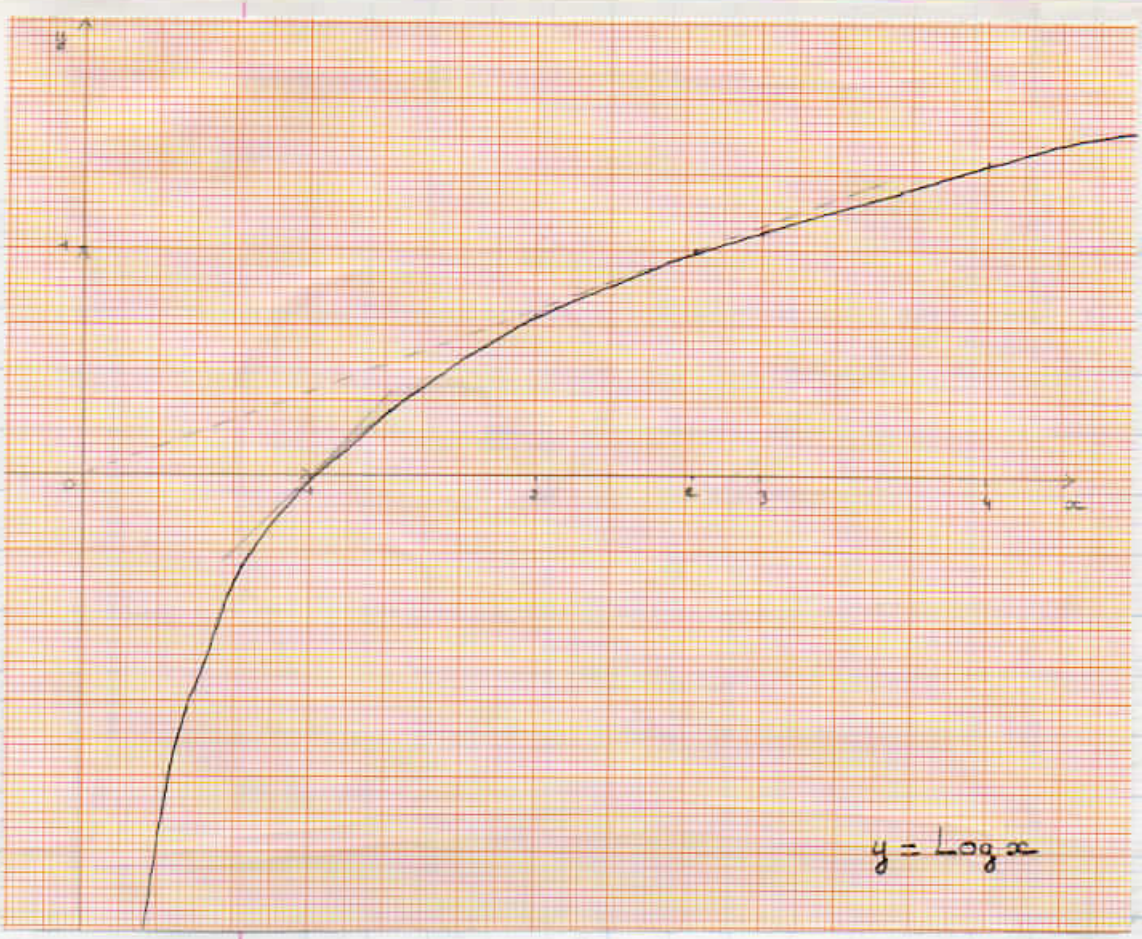
$$\boxed{\lim_{x \to 0_+} x \operatorname{Log} x = 0.}$$

Remarque

tangente en $(e, 1)$

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$$

$$y = \frac{1}{e} x$$


y
x
0
1
2
e
3
4
y = Log x

Logarithmes de base a
fcts exponentielles de base a

Rappel :

$$\ln_k : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln_k(x) = \int_1^x \frac{k}{t}\,dt$$

avec $\ln_k(x_1 \cdot x_2) = \ln_k(x_1) + \ln_k(x_2)$ ←

$\ln_k(x^n) = n \ln_k(x)$

* Choisissons, maintenant $n' = -n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\ln_k(x^{n'}) = \ln_k\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\ln_k(x^n) = -n \ln_k(x) = n' \ln_k(x)$$

car

$$\ln_k\left(\frac{1}{x^n}\right) + \ln_k(x^n) = \ln(1) \mapsto \ln_k\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\ln_k(x^n)$$

* Soit un exposant du type $\frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}^*$

$$x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x} \mapsto \begin{cases} x \geq 0 \\ (x^{\frac{1}{q}})^q = x \end{cases}$$

$x^{\frac{1}{q}} = u$

$\ln_k(u^q) = q \ln_k(u)$

$\ln_k(x) = q \ln_k(x^{\frac{1}{q}})$

$$\delta_k\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q}\,\delta_k(x)$$

* Soit un exposant du type $\frac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = u^p$$

$$\delta_k(u^p) = p\,\delta_k(u)$$

$$\delta_k\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}\,\delta_k(x)$$

Conclusion,

$\forall r \in \mathbb{Q}$, $\delta_k(x^r) = r\,\delta_k(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\delta_k\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \delta_k(x_1) - \delta_k(x_2) \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^{*2}$$

Base d'un système de logarithmes

$\delta_k(a) = 1$ donc $a > 0$

On se souvient que $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \operatorname{Log} x$

Donc $\delta_k(x) = k \operatorname{Log} x$

En particulier, pour $x = a$:

$$k \operatorname{Log} a = \delta_k(a) = 1$$

* Si k est donné non nul, alors $\operatorname{Log} a = \frac{1}{k}$
* Si a est donné différent de 1, alors $\operatorname{Log} a \neq 0$ et

$$k = \frac{1}{\text{Log } a}$$

$$\log_a(x) = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$$

Conséquence

$a \neq 1, \quad b \in \mathbb{R}_+^*$

$$\log_b x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } b}$$

$$\log_b a = \frac{\text{Log } a}{\text{Log } b}$$

$$\log_a b = \frac{\text{Log } b}{\text{Log } a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

exemple

$\text{Log } e = 1$

$\log 10 = 1 \qquad \log_{10} = \log$

$$\underbrace{\text{Log } 10}_{\approx 2,3} \times \underbrace{\log e}_{\approx 0,4} = 1$$

Pour passer d'un logarithme décimal de la calle au logarithme népérien correspondant, on utilise

$$\log_{10} x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 10} \qquad \text{avec} \quad M = \frac{1}{\text{Log } 10}$$

$$\text{Log } x = \frac{1}{M} \ln x$$

28.4

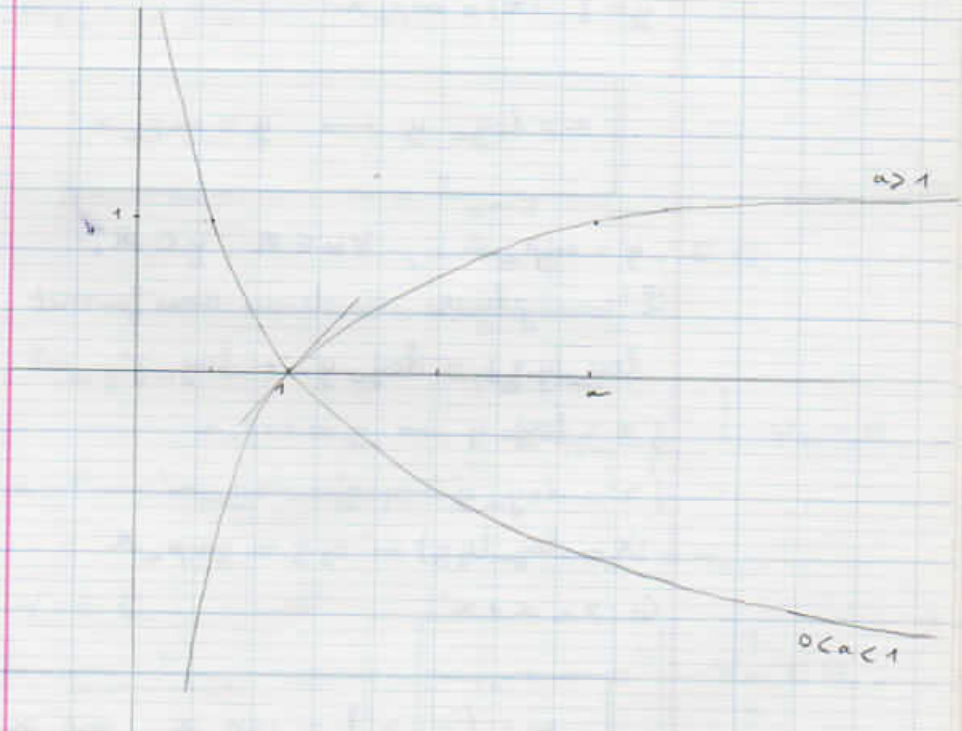
Retour à : $\log_a x = \dfrac{\text{Log } x}{\text{Log } a} = \dfrac{1}{\text{Log } a} \cdot \text{Log } x$

$a > 1$

x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	0		a		1		$+\infty$
$\log_a x$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$



Rappel : $\log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$

$\log_a$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

dérivée de f : $f(x) = \log_a x$

$f'(x) = \dfrac{1}{\text{Log}\, a} \cdot \dfrac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x \,\text{Log}\, a}$

Fonction réciproque de la bijection $\log_a$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\exists f^{-1}$; $x = \log_a y$, $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}$

$y = f^{-1}(x) = \exp_a x$

$$x = \log_a y \longmapsto y = \exp_a x$$

$y = \exp_a x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+^*$

L'isomorphisme ci-dessus nous fournit :

$\log_a(yz) = \log_a y + \log_a z$

$\begin{cases} x = \log_a y \longmapsto y = \exp_a x \\ x' = \log_a z \longmapsto z = \exp_a x' \end{cases}$

$X = \log_a(yz) \longmapsto yz = \exp_a X$

Or $X = x + x'$

$$\exp_a(x + x') = \exp_a x \cdot \exp_a x' \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall x' \in \mathbb{R}$$

Remarque

Suite arithmétique
Exponentielle des éléments
suite géométrique

$\exp(a+r) = \exp a \cdot \exp r$

$\underbrace{\exp(u_n + r)}_{v_{n+1}} = \underbrace{\exp u_n}_{v_n} \cdot \underbrace{\exp r}_{k}$

Cas particulier : $a = e$

$\exp_e x = \exp x$

29.4

Nouvelle notation pour $\exp_a x$: a^x

$y = \exp_a x \longmapsto x = \log_a y$

$rx = r \log_a y \quad , \forall r \in \mathbb{Q}$

$rx = \log_a y^r$

$\log_a y^r = rx \longmapsto y^r = \exp_a rx$

$\exp_a rx = (\exp_a x)^r \quad | \quad \forall x \in \mathbb{R}$

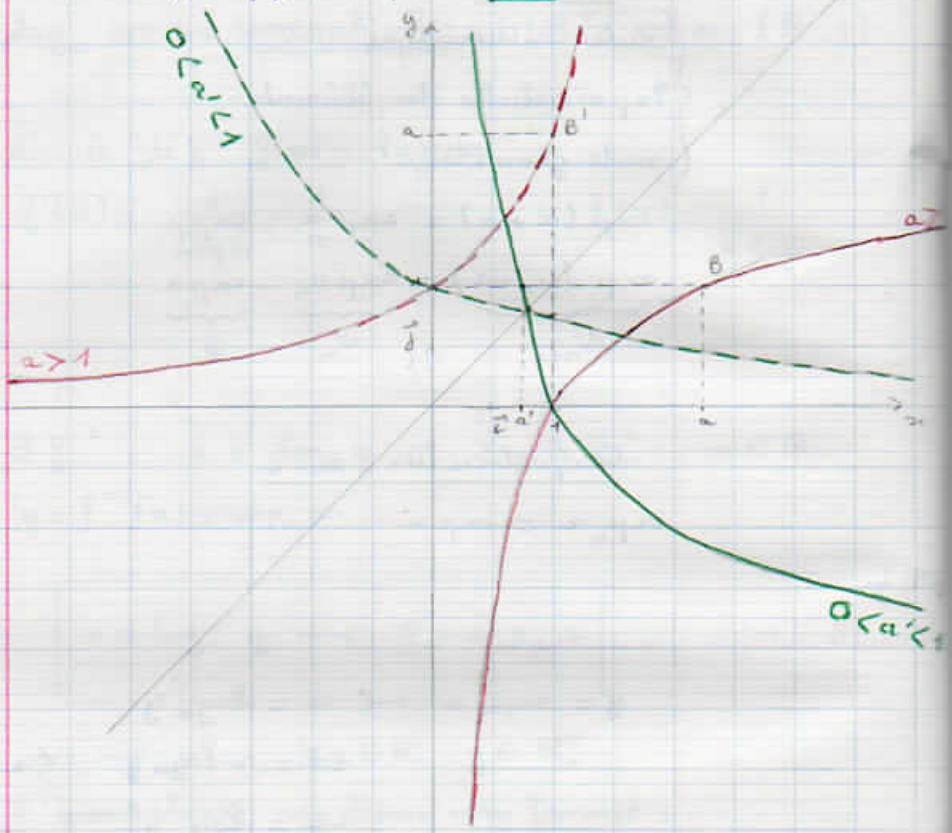
$x = 1 \longmapsto \exp_a r = (\exp_a 1)^r$

$\exp_a r = a^r \quad$ car $\exp_a 1 = a$

$\forall r \in \mathbb{Q}$

Par convention, on pose $\boxed{\exp_a x = a^x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Si $a = e$, $\exp_e x = \exp x = e^x$



Une exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ peut se mettre sous la forme d'une exponentielle base e

$$y = a^x \mapsto x = \log_a y$$

$$x = \frac{\text{Log } y}{\text{Log } a}$$

$$\text{Log } y = x \text{ Log } a$$

$$y = e^{x \log a}$$

$$a^x = e^{x \log a}$$

Dérivées

$$y = \exp_a x = a^x$$

$$x = \log_a y = \frac{\operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} a}$$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$$

$$x'(y) = \frac{1}{y \operatorname{Log} a}$$

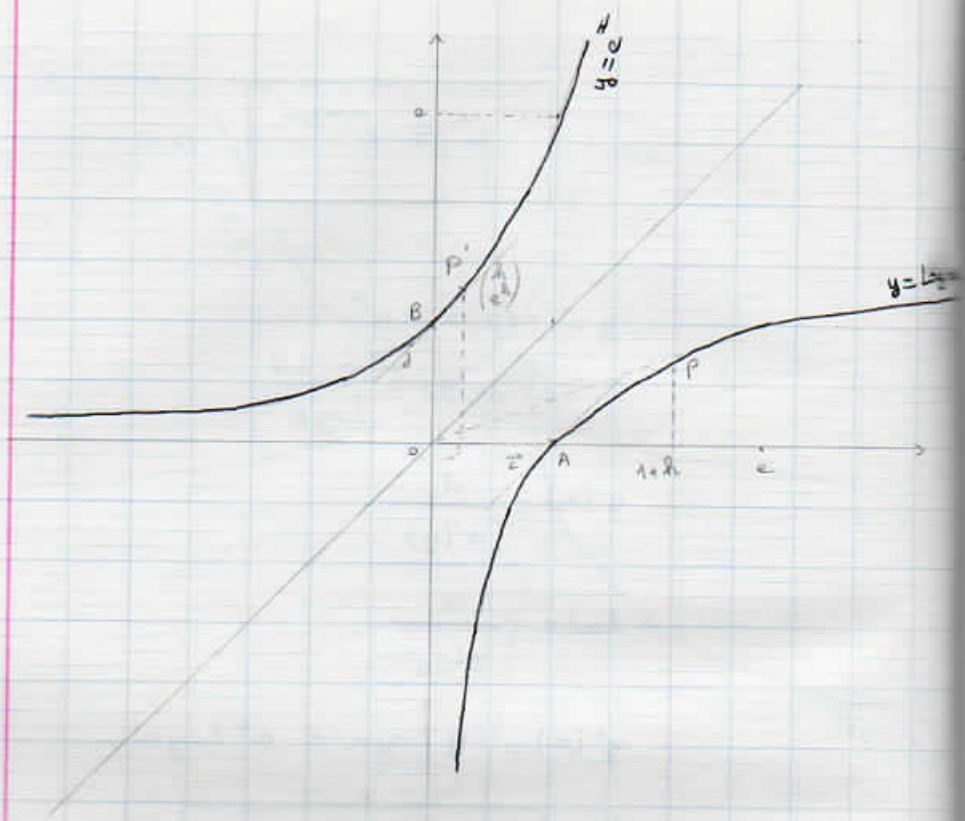
$$y'(x) = y \operatorname{Log} a = a^x \operatorname{Log} a$$

$$y'(x) = a^x \operatorname{Log} a$$

Cas où $a = e$

$$(e^x)' = e^x$$

Graphique de e^x



$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$?

Posons $e^x = X$ $\quad x = \text{Log}\, X$

$x \to +\infty$, alors $e^x = X \to +\infty$

$$\frac{e^x}{x} = \frac{X}{\text{Log}\, X}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{\text{Log}\, X} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

$\lim_{-\infty} x \cdot e^x$ (FI)

Soit $X = -x$

$x e^x = -X e^{-x} = -\frac{X}{e^X}$

donc $\lim_{-\infty} x e^x = 0_-$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0_-$

$x \to +\infty$	$\operatorname{Log} x \to +\infty$
$x \to +\infty$	$\frac{1}{x} \operatorname{Log} x \to 0_+$
$x \to +\infty$	$e^x \to +\infty$
$x \to +\infty$	$\frac{e^x}{x} \to +\infty$

3. Formes indéterminées faciles à lever

* $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+h)}{h} = 1$ taux d'accroissement de Log

En effet :

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \frac{\operatorname{Log}(1+h)}{h} = \frac{\operatorname{Log}(1+h) - \operatorname{Log} 1}{h}$

α, $\exists ! f'(1) = 1$, $f(x) = \operatorname{Log} x$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x} = 1$

2°) $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$g(x) = e^x$, $\exists!\ g'(0) = 1$, ~~$g(x) =$~~

Or $\frac{e^h - 1}{h - 0}$ = taux d'accroissement de e^x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Une équation différentielle classique : $y' - ay = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$

1ère méthode

$y = f(x) \in S$ (ensemble des solutions)

* $y_1 = e^{ax}$

$y_1' = a e^{ax}$

$y_1' - a y_1 = 0$

y_1 est donc une solution.

Toute solution de l'équation initiale peut se mettre sous la forme : $f(x) = e^{ax} \cdot g(x)$.

En effet, $\forall f \in S$, $g(x) = \frac{f(x)}{e^{ax}}$ et $\exists!\ g$

Inversement, $\forall g \in \mathcal{E}$, $g(x) = \frac{f(x)}{e^{ax}}$, $\exists!\ f(x) = e^{ax} \cdot g(x)$

Recherche des fonctions g :

$y = e^{ax} \cdot g(x)$

$y' = a e^{ax} g(x) + e^{ax} g'(x)$

$y' = ay \mapsto a e^{ax} g(x) + e^{ax} g'(x) = a e^{ax} g(x)$

$e^{ax} g'(x) = 0 \qquad e^{ax} \neq 0$

$g'(x) = 0 \quad , \forall x \in \mathrm{Def}_g$

$g(x) = C$

$f(x) = e^{ax} \times C$

Si les f sont définies sur $\mathbb{R}$, alors $f(x) = C e^{ax}$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$C = 0, \quad f(x) = 0$

$C = 1, \quad f_1(x) = y_1 = e^{ax}$

$$y = \mathbb{R}\, e^{ax}$$

3ème méthode

* dérivée de $\mathrm{Log}\,|u|$? $\quad u = f(x)$

Si $u > 0$, $\left[\mathrm{Log}\, u\right]' = \dfrac{u'}{u}$

Si $u < 0$, $\left[\log(-u)\right]' = \dfrac{1}{-u}(-u') = \dfrac{u'}{u}$

La dérivée de $\mathrm{Log}\,|u|$ est $\dfrac{u'}{u}$.

Conséquence : $\displaystyle\int_a^b \frac{u'}{u}\, dx = \left[\mathrm{Log}\,|u|\right]_a^b$

ex : $\int_\alpha^\beta \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \left[\text{Log}\,|\cos x|\right]_\alpha^\beta$

$\int_\alpha^\beta \text{tg}\,x\,dx = -\left[\text{Log}\,|\cos x|\right]_\beta^\alpha$ ← ←

$= \left[\text{Log}\,\frac{1}{|\cos x|}\right]_\alpha^\beta$

ex : $\int_\alpha^\beta \frac{2x-3}{x^2-3x+7} = \left[\text{Log}\,\underbrace{(x^2-3x+7)}_{>0}\right]_\alpha^\beta$

ex page 248 n° 6

$I = \int_\alpha^\beta \left(ax+b+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{(x-1)^2}\right)dx$

$= \left[a\frac{x^2}{2}+bx\right]_\alpha^\beta + c\left[\text{Log}\,|x-1|\right]_\alpha^\beta + d\left[\frac{1}{1-x}\right]_\alpha^\beta$

5.5

* Retour à $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}^*$

1°) $y = f_0(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$y' = 0$, et $y' = ay$ est vérifiée.

2°) Si $f \neq f_0$, $y \neq 0$, $\frac{y'}{y} = a$

$\text{Log}\,|y| = ax + C$

$|y| = e^{ax+c} = e^{ax} \cdot e^c$

$\pm y = \underbrace{e^c}_{>0} e^{ax}$

$\mp y = \underbrace{C'}_{>0} \cdot e^{ax}$

$y = \mp C' \cdot e^{ax}$

$y = k e^{ax}$ $\boxed{y = k e^{ax}}$, $k \neq 0$.

Résumé : $\begin{cases} y = f_0(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ y = k e^{ax}, \ k \neq 0. \end{cases}$

$y = k e^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$ est la solution générale.

Équation différentielle $n = 2$ $\boxed{y'' = -\omega^2 y}$ (1)

$y = f(x)$ inconnue

$y'' + \omega^2 y = 0$ $\omega \in \mathbb{R}^*$ ($\omega = 0$ facile)

1°) $(y_1, y_2) \in S^2$, S = ens. des solutions de (1)

Alors $y = y_1 + y_2 \in S$.

(l'ens. des fcts numériques est un esp. vectoriel sur $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, +, .)$)

En effet : $y'' = y_1'' + y_2'' = -\omega^2 (y_1 + y_2)$

$= -\omega^2 y$ donc $y \in S$

$y \in S \mapsto (\lambda y) \in S$ En effet, $(\lambda y)'' = \lambda y'' = \lambda(-\omega^2 y)$

$= -(\lambda \omega^2) y$

$= -\omega^2 (\lambda y)$

$(S, +, .)$ = espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ oui

$(\lambda \in \mathbb{R})$

2°/ On admet que la dimension de cet espace est 2.

3°/ $\cos \omega x$ et $\sin \omega x$ sont 2 éléments de S

$\{\cos \omega x, \sin \omega x\}$ est elle libre ? ($f_1 = \cos$, $f_2 = \sin$)

ssi et seulement si $\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\vdash \alpha = \beta = 0$

Vrai $\forall x \in \mathbb{R}$, alors $\omega x = 0$ par exemple.

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = 0 \quad \text{donc } \alpha = 0.$$

$\omega x = \frac{\pi}{2}$, $\vdash \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = 0 \vdash \beta = 0$ ou

4°/ $\forall y = f(x)$, $f \in S$

$$y = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$$

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Deuxième forme

$y = f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$

$f(x) = (A \cos \varphi) \cos \omega x - (A \sin \varphi) \sin \omega x$

$$\begin{cases} A \cos \varphi = \lambda \\ -A \sin \varphi = \mu \end{cases} \qquad (A, \varphi) \text{ inconnues}$$

$A^2 = \lambda^2 + \mu^2$

$A = \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, par exemple : +

Alors $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{-\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \end{cases}$ $\exists\, \varphi \ [2\pi]$

($\exists!$ image ponctuelle sur $\mathcal{U}$)

Le calcul de A et φ a toujours réussi, si toutefois $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$

Complément à propos de la notation (h,μ)

On pose $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

$\cos x + i \sin x = z \in \mathbb{C}$

Justification :

$\begin{cases} z_1 = \cos x + i \sin x \\ z_2 = \cos y + i \sin y \end{cases}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$|z_1| = |z_2| = 1$

$z_1 \cdot z_2 = \cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)}$

↑ les complexes se multiplient ; ↑ les arguments s'ajoutent ↑

$x = 0 \longmapsto z = 1 \in \mathbb{C}$

$e^{i0} = e^0 = 1$ } oui

$z = \cos x + i \sin x$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x$

$= \cos(-x) + i \sin(-x) = e^{-ix} = \dfrac{1}{e^{ix}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos y + i \sin y} = (\cos x + i \sin x)(\cos(-y) + i \sin(-y))$$
$$= \cos(x-y) + i \sin(x-y)$$

$$e^{i(x-y)} = \cos \frac{e^{ix}}{e^{iy}} = \frac{z_1}{z_2}$$

Remarque :

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$ = ens. des complexes unitaires

$x \longmapsto z = \cos x + i \sin x \qquad |z| = 1$

φ est un homomorphisme surjectif de groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathcal{U}, \times)$